

1.1 Der Differenzenquotient

In diesem Abschnitt lernen wir ein Maß kennen, mit dem man die Änderung einer Funktion in einem Intervall beschreiben kann.

1.01 Die nebenstehende Tabelle ist ein Auszug aus dem Fahrplan des Expresszuges „Romulus“.

Ort	Uhrzeit		Entfernung von Villach (in km)
	an	ab	
Villach		16.13	0
Klagenfurt	16.37	16.39	38
Leoben	18.33	18.35	196
Bruck a. d. Mur	18.47	18.49	212
Wiener Neustadt	20.09	20.10	322
Wien	20.40		372

- a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Zuges zwischen Villach und Klagenfurt, Klagenfurt und Leoben, Leoben und Bruck a.d. Mur, Bruck a.d. Mur und Wiener Neustadt, Wiener Neustadt und Wien. In welchen dieser Streckenabschnitte fährt der Zug am schnellsten?
- b) Die Bewegung des Zuges werde durch die Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$ beschrieben. Gib eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}(t_1, t_2)$ des Zuges im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.

Ein Körper bewege sich gemäß der Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$. Man nennt

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** des Körpers im **Zeitintervall** $[t_1, t_2]$

1.02 In nebenstehender Tabelle sind die zu verschiedenen Uhrzeiten t eines Tages gemessenen Temperaturen $T(t)$ an einem bestimmten Ort angegeben.

Uhrzeit t	Temperatur $T(t)$ (°C)
8	9
10	10
12	13
14	17
16	14
18	13
20	11

- a) Berechne die Temperaturänderungen in den Zeitintervallen $[8;14]$, $[12;18]$ und $[14;20]$. Was bedeutet positives, was negatives Vorzeichen der Temperaturänderung?
- b) Gib die Temperaturänderung im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.
- c) Berechne die Temperaturänderungen in den Zeitintervallen $[8;12]$, $[12;14]$ und $[10;16]$.
In welchem dieser Zeitintervalle ändert sich die Temperatur im Mittel am schnellsten?
- d) Gib die mittlere Temperaturänderungsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.

Lösung:

- a) Im Zeitintervall $[8;14]$: $17 - 9 = 8$ (°C)
Im Zeitintervall $[12;18]$: $13 - 13 = 0$ (°C)
Im Zeitintervall $[14;20]$: $11 - 17 = -6$ (°C)
- b) $T(t_2) - T(t_1)$
- c) Die Temperaturänderung beträgt in allen drei Zeitintervallen 4°C. Dies heißt aber nicht, dass die Temperatur in allen drei Zeitintervallen gleich schnell wächst, da die Zeitintervalle von unterschiedlicher Dauer sind. Die mittlere Temperaturänderungsgeschwindigkeit erhält man jeweils, indem man die Temperaturzunahme durch die Zeitdauer dividiert:
Im Zeitintervall $[8;12]$: $\frac{4}{4} = 1$ (°C/h)

Im Zeitintervall [12;14]: $\frac{4}{2} = 2$ (°C/h)

Im Zeitintervall [14;20]: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (°C/h)

Man erkennt: Die Temperatur ändert sich im Zeitintervall [12;14] im Mittel am schnellsten.

d) $\frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1}$

Ausdrücke wie $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ oder $\frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1}$ treten in der Mathematik und ihren

Anwendungen häufig auf und erhalten einen eigenen Namen:

Definition: Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[a, b] \subseteq A$. Dann heißt die reelle Zahl

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

der **Differenzenquotient** oder die **mittlere Änderungsrate von f in [a,b]**.

Grundaufgaben

1.04 Ein frei fallender Körper legt nach t Sekunden ungefähr den Weg $s(t) = 5t^2$ (in Meter) zurück. Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall:

- a) [0;1] b) [1;2] c) [2;3] d) [1;10]

1.05 Berechne die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall:

- a) $f: x \rightarrow 3x^2$, [1;5] c) $f: x \rightarrow x^2 - x$, [0;5] e) $f: x \rightarrow \frac{2}{x}$, [-5;-2]
b) $f: x \rightarrow 2x - 1$, [-2;4] d) $f: x \rightarrow x^3$, [2;8] f) $f: x \rightarrow \frac{1}{x^2}$, [10;20]

1.06 Gib die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall $[u, v]$ an. Wie lautet diese mittlere Änderungsrate, wenn a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$?

1.08 Die nebenstehende Tabelle gibt die Anzahlen der Ehescheidungen in Österreich von 1961 bis 2001 an. Es sei $A(t)$ die Anzahl der Ehescheidungen im Jahre t .

- a) Berechne die mittlere Scheidungsrate in den Zeiträumen [1961,1971], [1971,1981], [1981,1991] und [1991,2001]. In welchem dieser Zeiträume war die mittlere Scheidungsrate am größten?
b) Gib die Änderung der Anzahl der Ehescheidungen im Zeitraum $[a, b]$ an. Was bedeutet das Vorzeichen?

c) Gib die mittlere Scheidungsrate im Zeitraum $[a, b]$ an.

Jahr	Ehescheidungen
1961	8045
1971	10 005
1981	13 369
1991	16 391
1999	18 512
2000	19 552
2001	20 582

1.2 Das Vorzeichen des Differenzenquotienten

In diesem Abschnitt überlegen wir, was das Vorzeichen des Differenzenquotienten aussagt.

Ist $[a, b]$ ein Intervall, dann gilt $b - a > 0$. Damit ergibt sich folgendes:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \quad (\text{siehe Abb.1a})$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0 \Rightarrow f(b) - f(a) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (\text{siehe Abb.1b})$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b) \quad (\text{siehe Abb.1c})$$

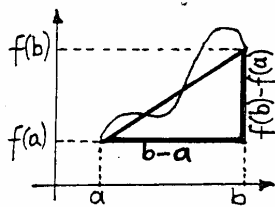


Abb.1a

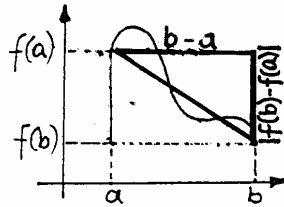


Abb.1b

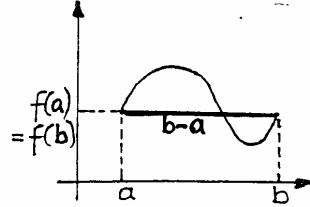


Abb.1c

Ist der Differenzenquotient von f in $[a, b]$

- positiv, so sagt man, f steigt insgesamt in $[a, b]$ bzw. f steigt im Mittel in $[a, b]$ (f muss aber nicht monoton steigend in $[a, b]$ sein),
- negativ, so sagt man, f fällt insgesamt in $[a, b]$ bzw. f fällt im Mittel in $[a, b]$ (f muss aber nicht monoton fallend in $[a, b]$ sein),
- gleich 0, so sagt bedeutet dies, dass f an den Stellen a und b den gleichen Wert annimmt (f muss aber nicht konstant in $[a, b]$ sein).

Grundaufgaben

1.12 Gegeben ist die nebenstehend abgebildete Funktion f .

- a) In welchen der Intervalle $[0; 2]$, $[2; 5]$ und $[5; 8]$ ist der Differenzenquotient positiv, in welchen negativ, in welchen gleich 0? Beantworte diese Frage, ohne zu rechnen.

- b) Ermittle die Differenzenquotienten von f in diesen Intervallen.

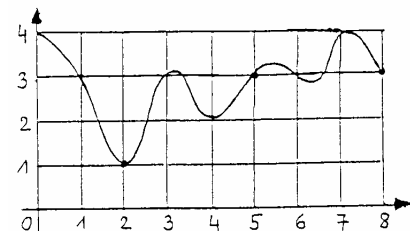


Abb.2

1.15 Zeichne den Graphen einer Funktion f , deren Differenzenquotient

- a) in den Intervallen $[0; 2]$, $[2; 4]$, $[4; 6]$, $[6; 8]$ abwechselnd positiv und negativ ist,
b) in $[0; 2]$ positiv, in $[2; 4]$ gleich 0, in $[4; 6]$ negativ und in $[6; 8]$ wieder positiv ist.

1.3 Der Differenzenquotient einer linearen bzw. nichtlinearen Funktion

In diesem Abschnitt lernen wir, was der Differenzenquotient einer Funktion mit der Steigung der Funktion zu tun hat.

1.20 Berechne den Differenzenquotient einer linearen Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ in einem Intervall $[a, b]$.

Lösung:
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{k \cdot b + d - (k \cdot a + d)}{b-a} = \frac{k \cdot b - k \cdot a}{b-a} = \frac{k \cdot (b-a)}{b-a} = k$$

Aus der letzten Aufgabe ergibt sich:

Satz: Der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) einer linearen Funktion ist in

jedem Intervall $[a,b]$ gleich der Steigung k .

Dieser Satz ist in Abb.1 veranschaulicht.

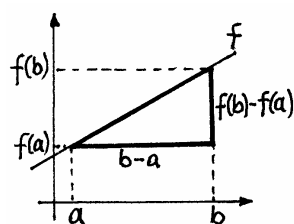


Abb.1

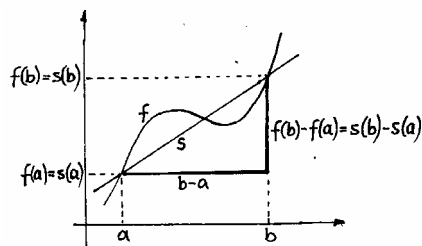


Abb.2

Ist die Funktion f in $[a,b]$ nicht linear, so kann man die lineare Funktion s mit $s(a) = f(a)$ und $s(b) = f(b)$ betrachten (siehe Abb.2). Man nennt diese Funktion die **Sekantenfunktion von f in $[a,b]$** . Der Graph von f verläuft oft in der Nähe des Graphen von s , dies muss aber nicht immer der Fall sein.

Ist k die Steigung der linearen Sekantenfunktion s , dann gilt aufgrund des obigen Satzes:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = k$$

Es gilt also:

Satz: Der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) einer Funktion f in $[a,b]$ ist gleich der Steigung der Sekantenfunktion von f in $[a,b]$.

Die Steigung k der Sekantenfunktion bezeichnet man auch als **mittlere Steigung von f in $[a,b]$** . Man sieht beispielsweise in Abb.2: Im Intervall $[a,b]$ ist die Steigung von f an manchen Stellen kleiner als die Steigung von s , an manchen Stellen größer. Im Mittel hat f jedoch im Intervall $[a,b]$ die Steigung k der Sekantenfunktion.

Grundaufgaben

1.21 Zeichne in Abb.3 die Sekantenfunktion von f im Intervall

- a) $[-2;1]$, b) $[1;3]$, c) $[3;5]$ ein. Ermittle deren Steigung und gib eine Termdarstellung der Sekantenfunktion an.

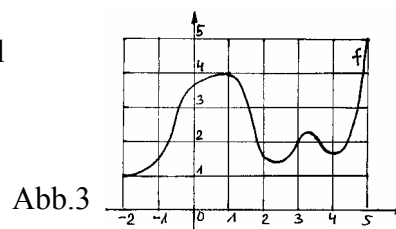


Abb.3

1.22 Sei $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$. Ermittle die Steigung der Sekantenfunktion von f im Intervall:

- a) $[0;9]$ b) $[3; 11]$ c) $[10;100]$ d) $[100;110]$

1.4 Deutungen des Differenzenquotienten

In diesem Abschnitt lernen wir Deutungen des Differenzenquotienten kennen, die für Anwendungen wichtig sind.

Den Differenzenquotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ kann man auffassen als Verhältnis der Änderung der Funktionswerte von f zur Änderung der Argumente im Intervall $[a,b]$.

Man kann ihn auch als *mittlere* Änderung der Funktionswerte von f pro Argumenteinheit im Intervall $[a,b]$ auffassen. (Er ist gleich der Steigung der Sekantenfunktion von f in $[a,b]$ und diese kann man als mittlere Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit auffassen).

Eine weitere Deutung des Differenzenquotienten ergibt sich durch folgende Überlegung:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k \Rightarrow f(b) - f(a) = k \cdot (b - a)$$

Der Differenzenquotient k gibt also den Faktor an, mit dem man die Änderung der Argumente in $[a,b]$ multiplizieren muss, um die Änderung der Funktionswerte in $[a,b]$ zu erhalten. Wenn k positiv (negativ) ist, kann man auch sagen: Die Funktionswerte wachsen (fallen) in $[a,b]$ k -mal so schnell wie die Argumente.

Wir fassen zusammen:

Deutungen des Differenzenquotienten (der **mittlere Änderungsrate**)

Differenzenquotient als Verhältnis: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente in $[a,b]$

Differenzenquotient als mittlere Änderung pro Einheit: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gleich der mittleren Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit in $[a,b]$

Differenzenquotient als Faktor: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente in $[a,b]$ multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte in $[a,b]$ zu erhalten.

Grundaufgaben

1.24 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2$. In welchem Verhältnis steht die Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente im Intervall:

- a) $[1;2]$ b) $[0;10]$ c) $[50;100]$ d) $[u,v]$

Lösung zu a): $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2-1} = \frac{9}{1}$. Das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente beträgt 9:1.

1.25 Ein frei fallender Körper legt in t Sekunden ungefähr den Weg $s(t) = 5t^2$ (in m) zurück. Wie groß ist die mittlere Wegzunahme pro Sekunde im Intervall:

- a) $[0;2]$ b) $[1;5]$ c) $[8;15]$ d) $[20;25]$

- ## 1.5 Der Differentialquotient

1.34 Für den Weg $s(t)$, den ein Körper beim freien Fall in der Zeit t zurücklegt, gilt näherungsweise $s(t) = 5 t^2$ (t in Sekunden, s in Meter; der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt).

a) Berechne die mittleren Geschwindigkeiten eines frei fallenden Körpers in den Zeitintervallen $[3, z]$ für $z = 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001$.

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3?

Zeitintervall [3; z]	Mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}(3, z)$
[3; 4]	35
[3; 3,5]	32,5
[3; 3,1]	30,5
[3; 3,01]	30,05
[3; 3,001]	30,005

- 6

wenn sich z *unbegrenzt* der Zahl 3 nähert. Aufgrund der Tabelle vermuten wir, dass dieser Grenzwert 30 ist, dass also $v(3) = 30$ m/s beträgt.

In der letzten Aufgabe haben wir aufgrund der Tabelle vermutet, dass der Grenzwert der mittleren Geschwindigkeiten gleich 30 ist. Können wir diesen Grenzwert auch berechnen? Können wir nicht einfach in der Formel $\bar{v}(3,z) = 5 \cdot (z+3)$ für die Variable $z=3$ setzen? Wir würden dann tatsächlich $5 \cdot (3+3) = 30$ erhalten. Leider können wir so nicht vorgehen, weil die Formel $\bar{v}(3,z) = 5 \cdot (z+3)$ nur für $z \neq 3$ gilt. Wir können aber folgendermaßen argumentieren: Wenn sich z unbegrenzt der Zahl 3 nähert, dann nähert sich $z+3$ unbegrenzt der Zahl 6 und somit $5 \cdot (z+3)$ unbegrenzt der Zahl $5 \cdot 6 = 30$.

Die Geschwindigkeit $v(3)$ ist der **Grenzwert** (lat.: **limes**) der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}(3,z)$, wenn sich z unbegrenzt der Zahl 3 nähert. Man schreibt dafür:

$$v(3) = \lim_{z \rightarrow 3} \bar{v}(3,z)$$

Man liest dies: $v(3)$ ist der Limes von $\bar{v}(3,z)$ für z gegen 3.

Ein Körper bewege sich gemäß der Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$. Man nennt

$$v(t) = \bar{v}(t,z) = \lim_{z \rightarrow t} \frac{s(z) - s(t)}{z - t}$$

die **Geschwindigkeit** des Körpers **zum Zeitpunkt t** .

Ausdrücke wie $\lim_{z \rightarrow t} \frac{s(z) - s(t)}{z - t}$ oder $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{V(z) - V(2)}{z - 2}$ treten in der Mathematik und ihren Anwendungen häufig auf und erhalten einen eigenen Namen:

Definition: Es sei f eine reelle Funktion. Der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

heißt **Differentialquotient von f an der Stelle x** oder **Änderungsrate von f an der Stelle x** .

In den Aufgaben 1.34 und 1.35 haben wir Änderungsrate von Größen betrachtet, die von der Zeit abhängen. Änderungsrate kann man aber auch berechnen, wenn es sich nicht um zeitliche, sondern andere Abhängigkeiten handelt. Die folgende Aufgabe soll dies illustrieren.

Grundaufgaben

1.37 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 + x - 1$. Stelle eine Formel für den Differentialquotienten $f'(x)$ auf und berechne $f'(3)$ sowie $f'(-5)$.

1.38 Stelle eine Formel für den Differentialquotienten $f'(x)$ auf und berechne $f'(1)$ und $f'(-3)$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 - x$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$

1.39 Stelle eine Formel für den Differentialquotienten $f'(x)$ auf und berechne $f'(-2)$ und $f'(4)$.

a) $f(x) = -\frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1.40 Bestimme den Differenzenquotient der Funktion f im Intervall $[2;4]$ und den Differentialquotient an der Stelle 2.

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = 1 - 2x^3$ c) $f(x) = x^4 - x^2 + 4$ d) $f(x) = x^5 - 2x$

1.41 Bestimme den Differenzenquotient der Funktion f im Intervall $[1;2]$ und den Differentialquotient an der Stelle 1.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = -\frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

1.6 Deutungen des Differentialquotienten

In diesem Abschnitt lernen wir, was man sich unter einem Differentialquotienten vorstellen kann.

Es ist $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$. Ist z sehr nahe bei x , dann ist $f'(x) \approx \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$. Man kann

sich also unter dem Differentialquotienten an der Stelle x näherungsweise einen Differenzenquotienten in einer sehr kleinen Umgebung von x vorstellen. Damit übertragen sich alle Deutungen des Differenzenquotienten auf den Differentialquotienten, wenn man nur dazusagt, dass man in der Nähe der Stelle x bleibt. Wir können also sagen:

Der **Differentialquotient** (die **Änderungsrate**) $f'(x)$ ist ungefähr gleich

- dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente in der Nähe von x ,
- der mittleren Änderung von f pro Argumenteinheit in der Nähe von x ,
- dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente in der Nähe von x multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten. Der Differentialquotient $f'(x)$ gibt näherungsweise an, wie viel mal schneller die Funktionswerte in der Nähe von x wachsen bzw. fallen als die Argumente.

Die zweite dieser drei Deutungen ergibt allerdings nur dann einen Sinn, wenn die Argumenteinheit klein im Vergleich zur betrachteten Umgebung von x ist.

Grundaufgaben

1.53 Gegeben ist die folgende Funktion f . Berechne $f'(3)$. Überprüfe das Ergebnis durch Berechnung des Differenzenquotienten von f im Intervall $[2,99;3,01]$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 + x$ c) $f(x) = \frac{9}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x$

1.54 Für eine Funktion f gilt a) $f'(2) = 5$, b) $f'(3) = 6$, c) $f'(8) = 10$, d) $f'(0) = -3$. Deute diese Aussage auf drei verschiedene Arten.

Der Differentialquotient als Steigung ist aus technischen Gründen nicht möglich!